EJERCICIO TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS **CAPÍTULO 85**

AUTOR DEL CURSO: Javier García

EJERCICIO RESUELTO: Miguel Ángel Montañez 27-07-2022

Ejercicio 85. En un problema (1 + 1) formado por dos masas que se mueven con velocidades v_a y v_b:

a) Demostrar que $E_aE_b\cdot|v_a - v_b| = [(E_bp_a - E_ap_b)^2]^{1/2}$.

Sean E_a y E_b las energías de las partículas, y p_a y p_b sus correspondientes trimomentos (en este caso tienen una sola componente). Como c = 1:

$$E = p^0 = \gamma m$$

$$p = \gamma m v = p^0 v = E\cdot v$$

Entonces:

$$E_aE_b\cdot|v_a - v_b| = E_aE_b\cdot[(v_a - v_b)^2]^{1/2} = [E_a^2E_b^2\cdot(v_a - v_b)^2]^{1/2} = [(E_aE_bv_a - E_aE_bv_b)^2]^{1/2}$$

Por las propiedades que hemos visto arriba:

$$[(E_aE_bv_a - E_aE_bv_b)^2]^{1/2} = [(E_bp_a - E_ap_b)^2]^{1/2}$$

Con lo que se demuestra:

$$E_aE_b\cdot|v_a - v_b| = [(E_bp_a - E_ap_b)^2]^{1/2}$$

Esta demostración tiene sentido solo si $v_a \neq v_b$; pero esto no importa, porque en caso contrario, las partículas no se acercarían y no habría colisión.

b) Demostrar que ($E_b p_a - E_a p_b$) es un invariante Lorentz.

En una transformación Lorentz (1 + 1) las cantidades E y p transforman de la siguiente manera (c = 1):

$$E' = \gamma(E - \beta p) \qquad\qquad p' = \gamma(p - \beta E)$$

En estas ecuaciones:

$$\gamma = 1/(1 - \beta^2)^{1/2} \qquad\qquad \beta = v/c = v$$

En el sistema O' en movimiento respecto a O:

$$E'_b p'_a - E'_a p'_b$$

Como:

$$E'_a = \gamma(E_a - \beta p_a) \qquad p'_a = \gamma(p_a - \beta E_a) \qquad E'_b = \gamma(E_b - \beta p_b) \qquad p'_b = \gamma(p_b - \beta E_b)$$

Sustituimos:

$$E'_b p'_a - E'_a p'_b = \gamma(E_b - \beta p_b)\gamma(p_a - \beta E_a) - \gamma(E_a - \beta p_a)\gamma(p_b - \beta E_b)$$

Operamos:

$$E'_b p'_a - E'_a p'_b = \gamma^2\left(E_b p_a - \beta E_b E_a - \beta p_b p_a + \beta^2 E_a p_b - E_a p_b + \beta E_a E_b + \beta p_a p_b + \beta^2 E_b p_a\right)$$

$$E'_b p'_a - E'_a p'_b = \gamma^2\left(E_b p_a + \beta^2 E_a p_b - E_a p_b - \beta^2 E_b p_a\right)$$

$$E'_b p'_a - E'_a p'_b = \gamma^2\left[E_b p_a \cdot (1 - \beta^2) - E_a p_b \cdot (1 - \beta^2)\right] = \gamma^2(1 - \beta^2) \cdot \left[E_b p_a - E_a p_b\right]$$

Concluyendo la demostración:

$$E'_b p'_a - E'_a p'_b = E_b p_a - E_a p_b$$

Luego, $E_b p_a - E_a p_b$ es un invariante Lorentz.

Como:

$$E_a E_b \cdot \left| v_a - v_b \right| = \left[(E_b p_a - E_a p_b)^2 \right]^{1/2}$$

y la cantidad $E_b p_a - E_a p_b$ es un invariante Lorentz, se deduce que $E_a E_b \cdot \left| v_a - v_b \right|$ también lo es.